

DOZENT: PROF. TIBOR SZABÓ,  
TUTOREN: TILMAN MIRSCHEL, OLAF PARCZYK, YIZHENG YUAN

## Übungsblatt 9

Abzugeben bis zum 19. Dezember, 12:00, in den Fächern der Tutoren

### Aufgabe 1 [10 Punkte]

(a) Die Menge  $\Omega = [47]$  sei mit der Gleichverteilung versehen. Zeigen Sie, dass wenn Ereignisse  $A$  und  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  unabhängig sind, dann eine der beiden Mengen leer oder  $\Omega$  ist.

(b) Zeigen Sie, dass die analoge Behauptung mit 48 statt 47 ist nicht richtig.

### Aufgabe 2 [10 Punkte]

Drei Kästen  $K_1, K_2, K_3$  enthalten gut durchmischt schwarze und weiße Kugeln.  $K_1$  enthält 2 schwarze und 4 weiße,  $K_2$  enthält 3 schwarze und 5 weiße, und  $K_3$  enthält 1 schwarze und 3 weiße Kugeln.

(a) Aus Kasten  $K_3$  wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß, die zweite schwarz, und die dritte wieder weiß ist?

(b) Nun wird zunächst einer der Kästen zufällig ausgewählt (jeder mit Wahrscheinlichkeit  $1/3$ ), aus dem dann einmal gezogen wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert das eine weiße Kugel?

(c) Wenn eine Ziehung wie in (b) eine weiße Kugel liefert, mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde dann im ersten Schritt Kasten  $K_2$  gewählt?

### Aufgabe 3 [10 Punkte]

Sei  $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$  a W-Raum und  $A, B \in \mathcal{E}$  zwei unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie (aus der Definition), dass das Mengensystem

$$\{E \in \mathcal{E} : \{A, B, E\} \text{ ist unabhängig}\}$$

ein Dynkin-system ist.

### Aufgabe 4 [10 Punkte]

$\Omega := [7]^{11}$  sei mit der Gleichverteilung versehen. Wir definieren  $E_{k,l}$  durch  $E_{k,l} := \{(x_1, \dots, x_{11}) : x_k = l\}$  für  $k \in [7]$  und  $l \in [11]$ . Was ist die maximale Anzahl der Ereignissen, die Sie aus diesen 77 wählen können, so dass sie eine unabhängige Menge von Ereignissen formen.

**Bonusaufgabe** Lösen Sie Aufgabe 1 von Übungsblatt 3 ganz ausführlich. (Tipp: jetzt ist es möglich mit einer Anwendung des Klonsatzes.)